

# Lezione

Tecnica delle Costruzioni

# **Comportamento e modellazione del cemento armato**

# Modellazione del cemento armato

## Comportamento del cemento armato

Il comportamento del cemento armato dipende dalle caratteristiche e dalla distribuzione dei suoi principali costituenti (calcestruzzo e acciaio delle barre di armatura).

- Una struttura in cemento armato è fortemente eterogenea; essa è ben diversa, dunque, dal materiale omogeneo e isotropo ipotizzato dalla teoria dell'elasticità lineare studiata dalla Scienza delle costruzioni.

Infatti:

- il *calcestruzzo* non è un materiale di per sé omogeneo, e la presenza (pur fisiologica) di fessure introduce delle discontinuità;
- le *barre di armatura* costituiscono una ulteriore disomogeneità, ed introducono una consistente differenza di comportamento a seconda della direzione delle azioni applicate.

# Modellazione del cemento armato

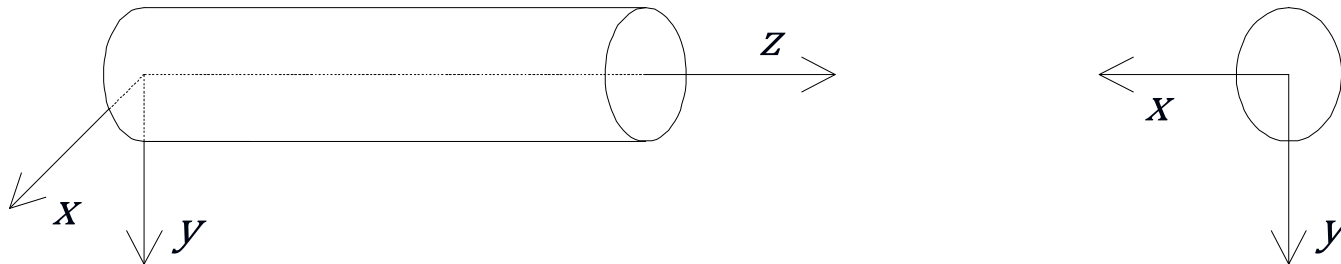
## Dal comportamento reale al modello analitico

- Per analizzare numericamente una struttura in cemento armato occorre proporre dei modelli semplificati, i quali possono dipendere dal tipo di sollecitazione e dalla forma dell'elemento strutturale.
- Poiché sia il calcestruzzo che l'acciaio hanno un comportamento non lineare, questi modelli devono essere legati all'entità dello stato deformativo e tensionale.

# Modellazione dell'asta

## Assi di riferimento, azioni esterne e comp. di movimento

Il sistema di riferimento locale per un'asta è costituito convenzionalmente da una terna di assi aventi l'origine nel baricentro geometrico della sezione. L'asse  $z$  è parallelo all'asse dell'asta ed orientato da sinistra verso destra.



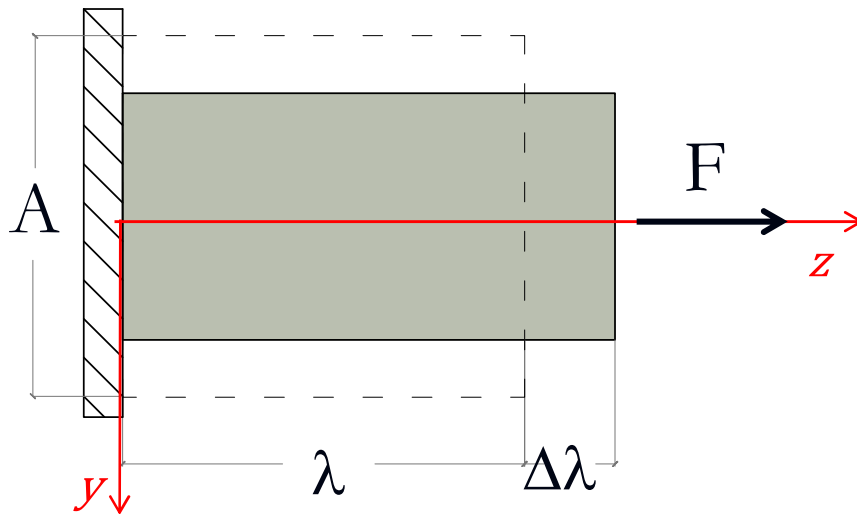
Nel piano della sezione, l'asse  $x$  è orizzontale ed orientato da destra verso sinistra, mentre l'asse  $y$  è orientato dall'alto verso il basso.

Si considera come direzione positiva degli spostamenti  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , quella concorde con il verso positivo degli assi; come verso positivo di rotazione quello che porta  $x$  su  $y$ ,  $y$  su  $z$  e  $z$  su  $x$ . Analoga convenzione vale per le azioni esterne.

# Modellazione dell'asta

## Deformazioni e tensioni normali

Si considerano positive le deformazioni unitarie  $\varepsilon$  di allungamento e le tensioni normali  $\sigma$  di trazione.



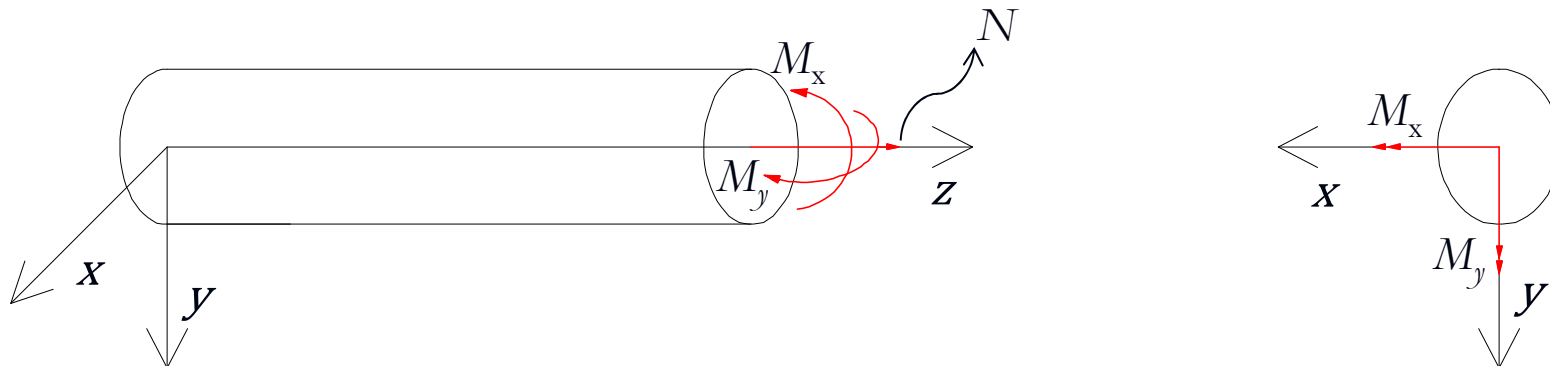
$$\sigma = F/A \quad \Rightarrow \quad +$$

$$\varepsilon = \Delta\lambda / \lambda \quad \Rightarrow \quad +$$

# Modellazione dell'asta

## Caratteristiche della sollecitazione

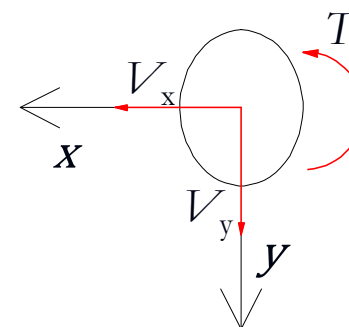
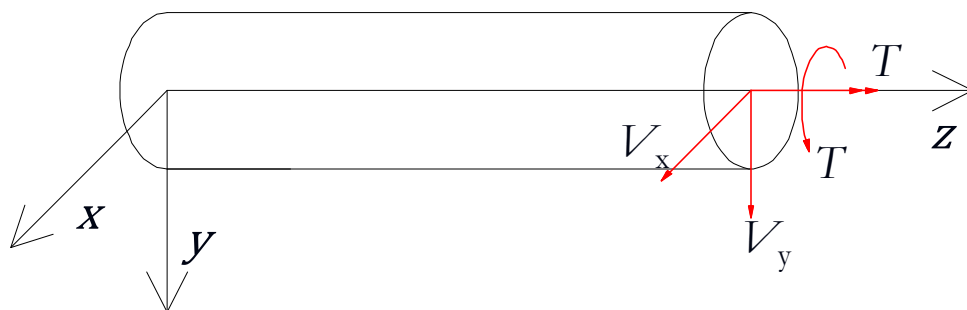
- Lo sforzo normale  $N$  è positivo se di trazione
- Il momento flettente  $M_x$  è positivo se ha il verso che porta  $y$  su  $z$  (esso quindi tende le fibre inferiori)
- Il momento flettente  $M_y$  è positivo se ha il verso che porta  $z$  su  $x$



# Modellazione dell'asta

## Caratteristiche della sollecitazione

- Il **taglio** è indicato con il simbolo  $V$ .  
Le componenti del taglio lungo gli assi  $x$  ed  $y$  ( $V_x$  e  $V_y$ ) sono positive se concordi con il verso positivo degli assi.
- Il **momento torcente**  $T$  è positivo se ha il verso che porta  $x$  su  $y$ .





# Modellazione dell'asta

## Relazioni tra carichi, sollecitazioni e comp. di movimento

In conseguenza alla convenzione dei segni appena definita, le equazioni differenziali che legano i carichi, le caratteristiche della sollecitazione e le componenti di movimento in uno schema piano sono:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}$$

$$\frac{dN}{dz} = -n$$

dove:

$$\frac{dv}{dz} = -\varphi + \frac{\chi V}{GA}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI}$$

v, w

sono le componenti di movimento secondo gli assi y e z

$$\frac{dM}{dz} = V - m$$

$$\frac{dV}{dz} = -q$$

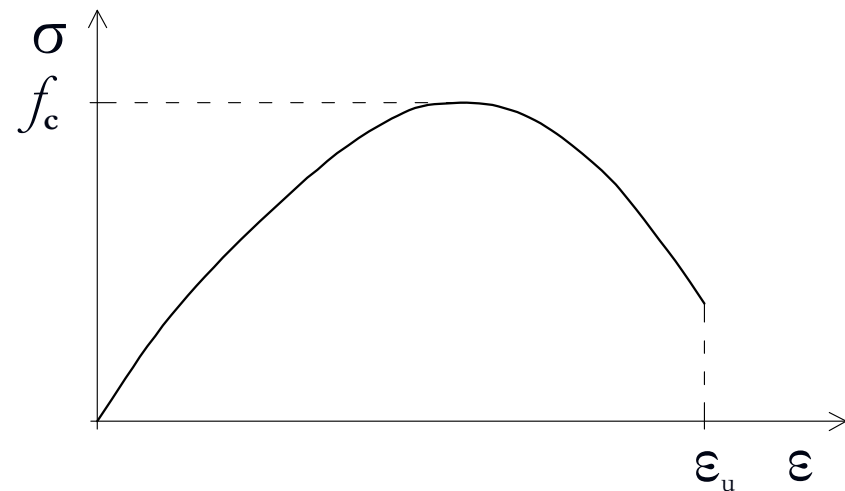
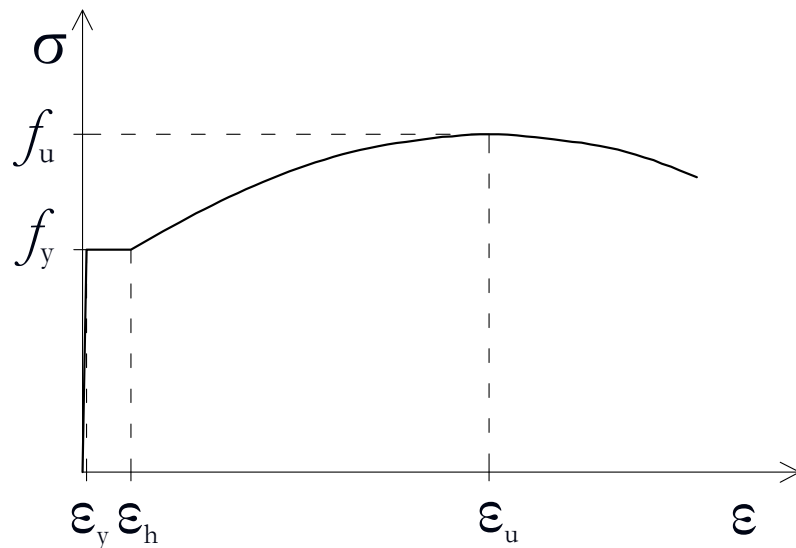
n, q, m

sono i carichi distribuiti assiali, taglienti e flettenti

# Modellazione del materiale

## Comportamento reale

I modelli sono delle rappresentazioni semplificate del comportamento dei materiali, e sono utilizzati per descrivere in maniera analitica l'andamento dei legami costitutivi  $\sigma$ - $\epsilon$



# Modellazione del materiale

## Stadi del calcestruzzo

Con riferimento al *calcestruzzo*, si possono distinguere

### **tre stadi di comportamento**

(definiti in base alle tensioni e alle deformazioni provocate dai carichi).

- **Primo stadio**

Deformazioni e tensioni molto piccole;

- **Secondo stadio**

Deformazioni e tensioni più grandi, ma ancora lontane da quelle di rottura;

- **Terzo stadio**

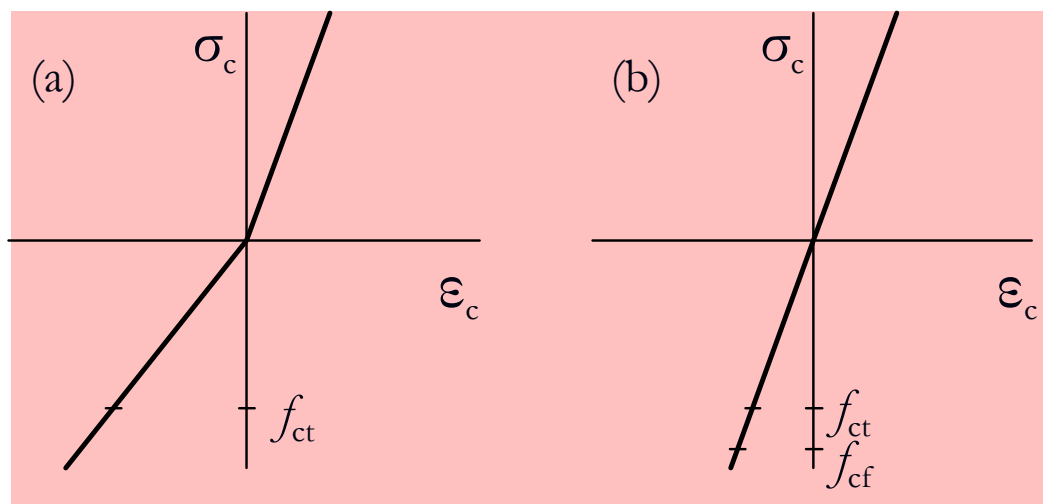
Deformazioni e tensioni elevate.

Per ciascuno di questi stadi viene proposto un diverso modello del materiale:

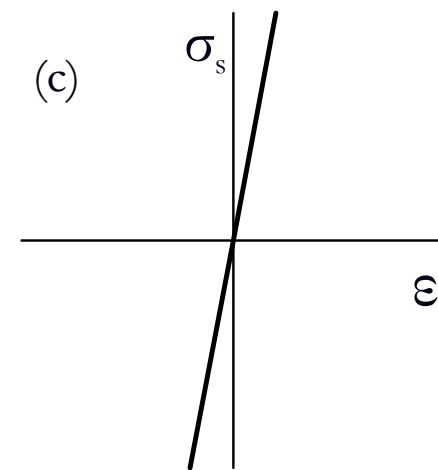
# Modellazione del materiale

## Primo stadio

- **Carichi molto bassi** (conseguenti deformazioni e tensioni molto piccole)  
Si può ipotizzare che il calcestruzzo abbia un comportamento lineare sia a compressione che a trazione (sebbene l'andamento delle tensioni nel calcestruzzo teso sia non lineare al crescere delle deformazioni).



calcestruzzo

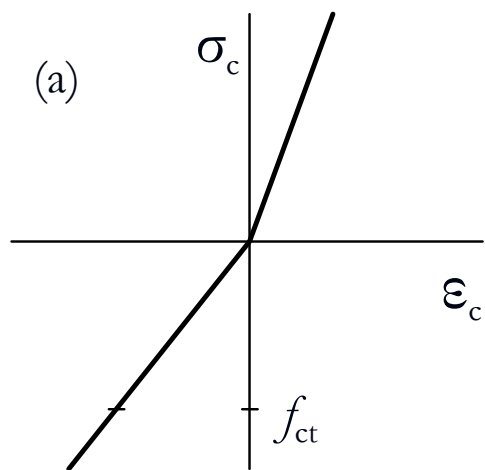


acciaio

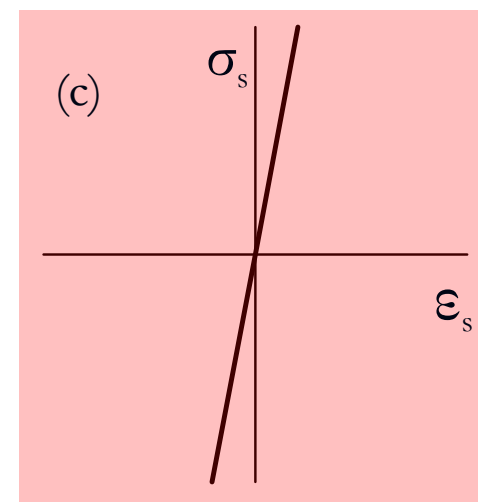
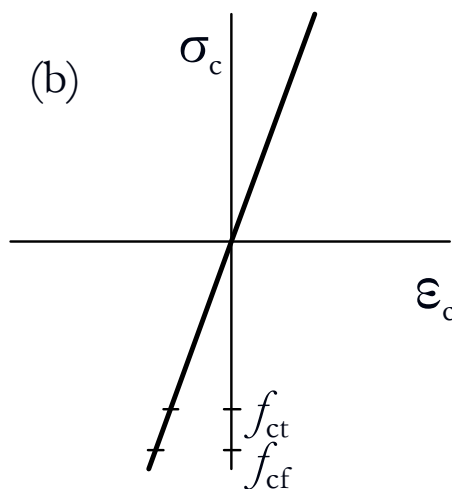
# Modellazione del materiale

## Primo stadio

- **Carichi molto bassi** (conseguenti deformazioni e tensioni molto piccole)  
Si può ipotizzare che l'acciaio abbia un comportamento linearmente elastico, sia a trazione che a compressione (c).



calcestruzzo



acciaio

# Modellazione del materiale

## Primo stadio: schema riassuntivo

- **Tipi di carico:** carichi molto bassi, con conseguenti deformazioni e tensioni molto piccole;
- **Impiego del modello:** per la determinazione della caratteristica di sollecitazione che porta alla rottura per trazione (il modello si utilizza ad esempio nel calcolo del momento flettente o dello sforzo normale di prima fessurazione, nelle verifiche allo s.l.e. di fessurazione, oppure nel valutare l'azione che porta a rottura il “dente” del modello a pettine usato nel valutare la resistenza a taglio di sezioni non armate);
- **Comportamento del calcestruzzo:** elastico lineare sia a trazione che a compressione;
- **Comportamento dell' acciaio:** elastico lineare;

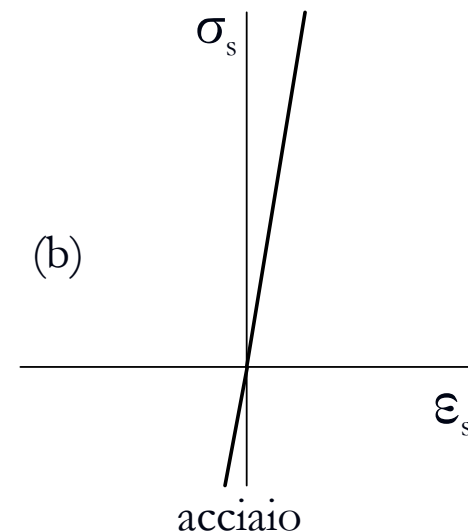
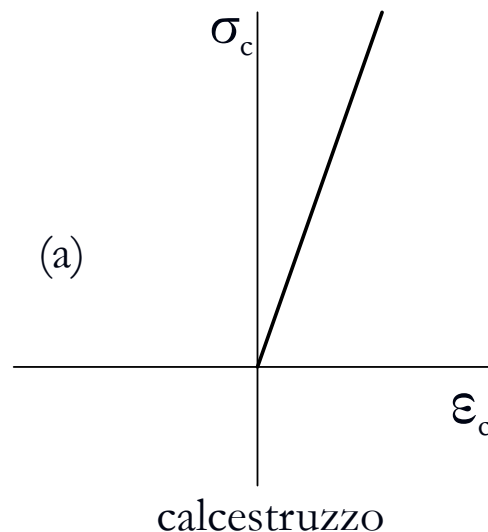
Le formule della Scienza delle costruzioni per la determinazione dello stato tensionale possono essere applicate alla *sezione omogeneizzata* (nota a priori).

# Modellazione del materiale

## Secondo stadio

- **Valori dei carichi più frequenti** (deformazioni e tensioni più alte ma ancora lontane da quelle di rottura).

Si può ipotizzare che il calcestruzzo compresso abbia un comportamento elastico lineare e che la resistenza del calcestruzzo teso sia nulla (a). Per l'acciaio si continua ad utilizzare un modello elastico lineare (b).



# Modellazione del materiale

## Secondo stadio: schema riassuntivo

- **Tipi di carico:** valori del carico più frequenti, con deformazioni e tensioni alquanto alte ma ancora lontane da quelle di rottura;
- **Impiego del modello:** per le verifiche agli stati limite di esercizio (dopo la fessurazione). Il primo passo della verifica è la determinazione della posizione dell'asse neutro. Questo modello si utilizzava anche per le verifiche alle tensioni ammissibili.
- **Comportamento del calcestruzzo:** elastico lineare, resistente solo a compressione;
- **Comportamento dell'acciaio:** elastico lineare;

Le formule della Scienza delle costruzioni per la determinazione dello stato tensionale possono essere applicate alla *sezione reagente omogeneizzata* (non conosciuta a priori).



# Modellazione del materiale

## Terzo stadio

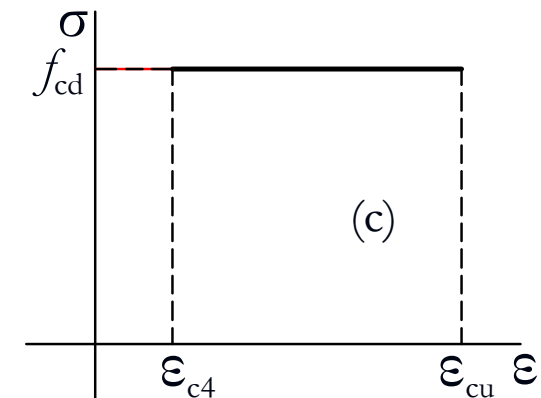
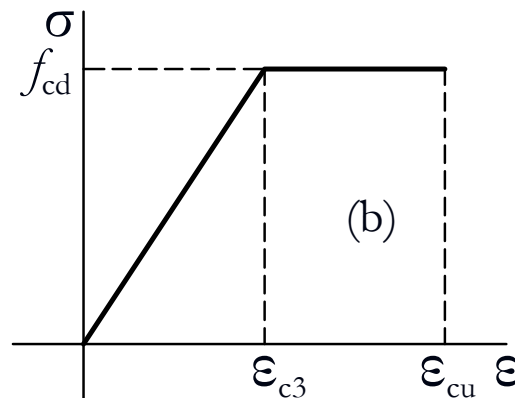
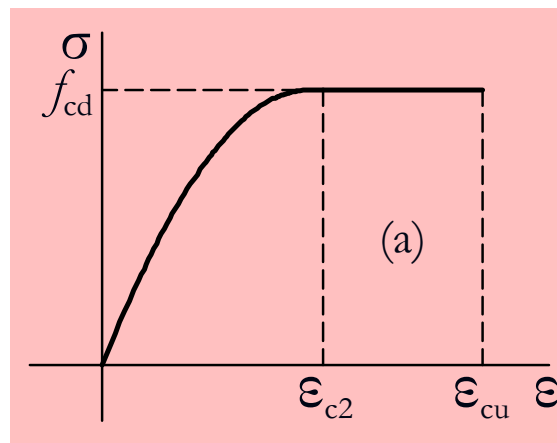
- **Valori di carico per cui si raggiungono deformazioni molto elevate.**  
In questo caso è necessario tenere conto dell'andamento non lineare del legame  $\sigma$ - $\epsilon$ , evidenziato dalle prove sperimentali.

Per quanto riguarda il calcestruzzo, si ipotizza che la resistenza a trazione sia nulla. Le prove di schiacciamento mostrano un andamento del diagramma  $\sigma$ - $\epsilon$  non-lineare e una tensione crescente fino ad un valore di deformazione  $\epsilon_{c0}$  prossimo a 2‰. Se la prova è condotta imponendo deformazioni (e non carichi) si nota un successivo tratto discendente, fino al valore di rottura  $\epsilon_{cu}$  della deformazione. La presenza di staffe riduce la pendenza del tratto discendente ed aumenta in modo rilevante il valore della deformazione ultima.

# Modellazione del materiale

## Terzo stadio

- **Valori di carico per cui si raggiungono deformazioni molto elevate.**  
Per valutare la resistenza ultima di una sezione si considerano i seguenti modelli semplificati:



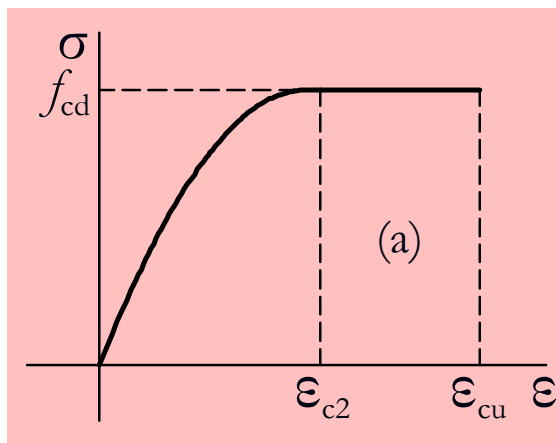
# Modellazione del materiale

## Terzo stadio: deformazioni (diagramma parabola-rettangolo)

- Per calcestruzzi con classe di resistenza minore o uguale alla C50/60,  $\epsilon_{c2}$  vale 0.0020, mentre  $\epsilon_{cu}$  vale 0.0035 (NTC 08, punto 4.1.2.1.2.2.).
- Per calcestruzzi con classe di resistenza maggiore della C50/60 la normativa impone i seguenti limiti:

$$\epsilon_{c2} = 0.0020 + 0.000085 (f_{ck} - 50)^{0.53}$$

$$\epsilon_{cu} = 0.0026 + 0.035 [(90 - f_{ck})/100]^4$$



- $\epsilon_{c2}$  rappresenta il valore di deformazione associato al punto di massima della parabola;
- $\epsilon_{cu}$  rappresenta il valore finale del tratto orizzontale del grafico, ed è riferito al caso delle sezioni parzializzate (in parte tese e in parte compresse).

# Modellazione del materiale

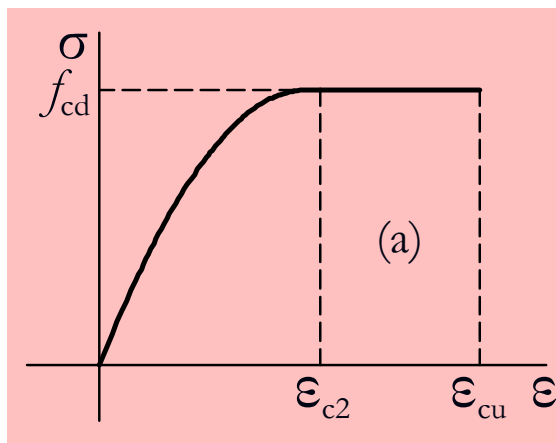
## Terzo stadio: tensioni (diagramma parabola-rettangolo)

Il valore ultimo della resistenza a compressione è rappresentato dal valore di calcolo  $f_{cd}$ . Il legame costitutivo è espresso analiticamente dalle relazioni:

$$\sigma_c = -\eta(2 - \eta) f_{cd} \quad \text{per } 0 \leq \eta \leq 1$$

$$\sigma_c = -f_{cd} \quad \text{per } 1 \leq \eta \leq \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c2}$$

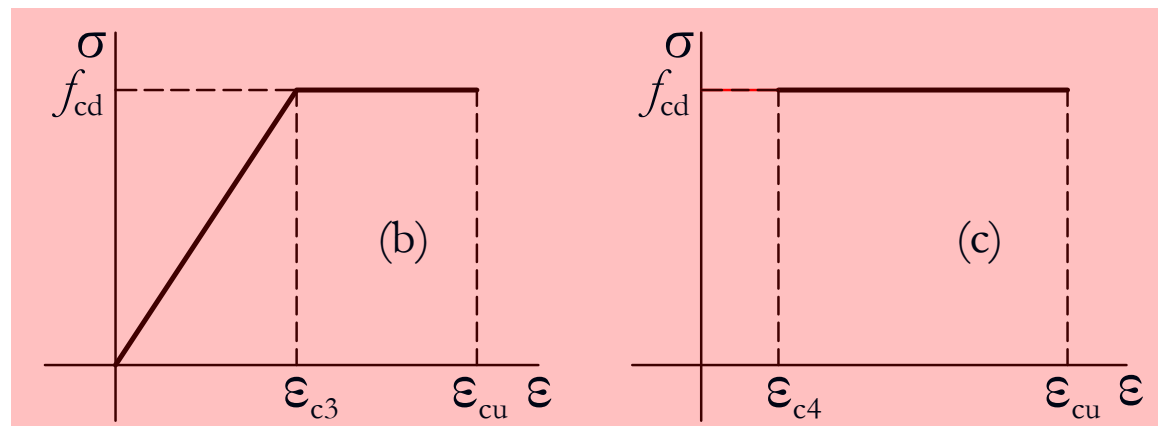
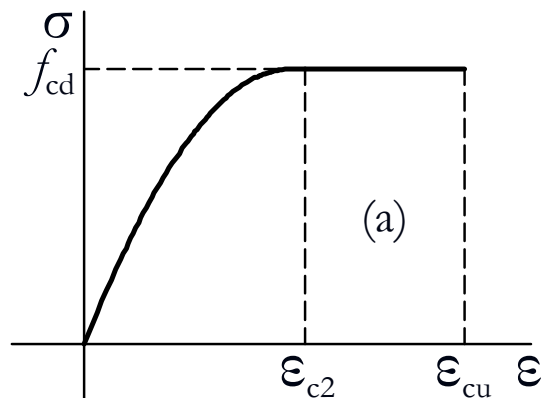
$$\text{con } \eta = -\varepsilon_c / \varepsilon_{c2}$$



# Modellazione del materiale

## Terzo stadio (diagramma lineare-costante; diagr. costante)

- Il modello (b) è costituito da un tratto lineare fino alla deformazione  $\epsilon_{c3}$  (pari a 1.75‰ per calcestruzzi fino alla C50/60) e da un tratto costante.
- Il modello (c) considera una tensione costante per un tratto compreso tra  $0.2 \epsilon_{cu}$  ed  $\epsilon_{cu}$  (ovvero per l'80% della capacità deformativa del calcestruzzo).

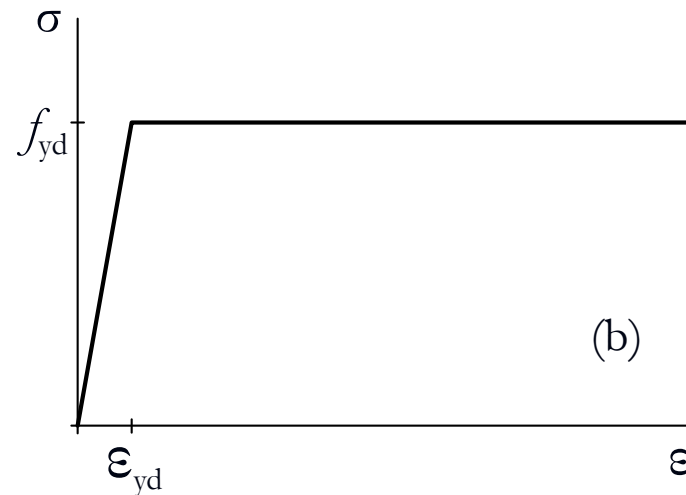
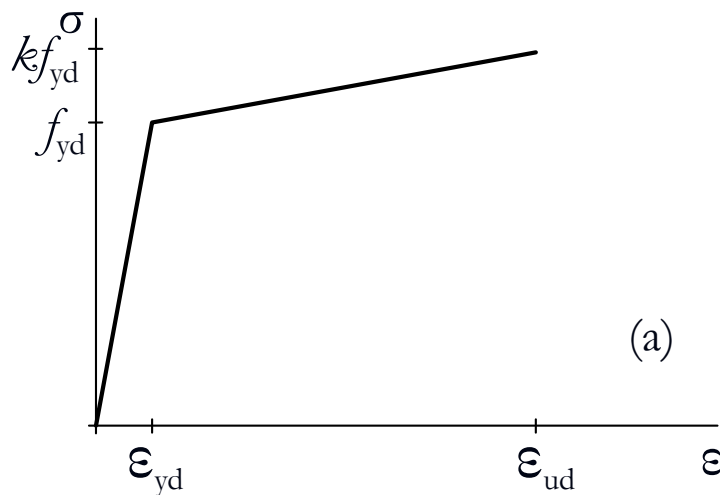


# Modellazione del materiale

## Terzo stadio (acciaio)

Per quanto riguarda l'acciaio:

- Il modello (a) è costituito da un tratto elastico (fino al valore  $f_{yd}$ ) al quale segue un tratto plastico incrudente, con inclinazione tale da raggiungere il valore  $kf_{yd}$  per una deformazione  $\epsilon_{ud}$ .
- Il modello (b) è costituito da un tratto elastico, fino a  $f_{yd}$ , e da uno perfettamente plastico, senza limiti di deformazione dell'acciaio.



# **Modellazione del cemento armato in presenza di sforzo normale e momento flettente**

# Modellazione in presenza di N e M

## Ipotesi di partenza

Lo stato deformativo-tensionale che nasce per effetto di sforzo normale e momento flettente è costituito da deformazioni  $\epsilon_z$  e tensioni normali  $\sigma_z$  dirette secondo l'asse dell'asta.

Le ipotesi di partenza nell'analisi di un elemento in conglomerato cementizio armato sono due:

- 1) **PERFETTA ADERENZA** tra calcestruzzo e armatura.  
Questa ipotesi implica che i due materiali abbiano uguale deformazione nei punti di contatto.
- 2) **CONSERVAZIONE DELLE SEZIONI PIANE**.  
Questa ipotesi equivale a dire che il diagramma delle deformazioni longitudinali  $\epsilon_z$  è rappresentato da un piano nello spazio  $x, y, \epsilon_z$ .



# Modellazione in presenza di N e M

## Ipotesi di partenza

La seconda ipotesi implica che la deformazione in un punto della sezione è legata alle coordinate  $x$  e  $y$  del punto dalla seguente relazione lineare:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_x x + \chi_y y$$

nella quale:

$\varepsilon_0$  rappresenta la deformazione del punto di origine degli assi, coincidente in genere con il baricentro G della sezione.

$\chi_x = \frac{\delta \varepsilon_z}{\delta x}$  rappresenta la curvatura nel piano x-z (derivata di  $\varepsilon_z$  rispetto a x)

$\chi_y = \frac{\delta \varepsilon_z}{\delta y}$  rappresenta la curvatura nel piano y-z (derivata di  $\varepsilon_z$  rispetto a y)

# Modellazione in presenza di Ne M

## Caratteristiche della sollecitazione

**Come si determinano le caratteristiche della sollecitazione corrispondenti a definiti diagrammi di deformazione ?**

1. Il diagramma delle deformazioni della sezione, valido sia per l'acciaio che per il calcestruzzo per l'ipotesi di perfetta aderenza, è definito dai tre parametri  $\varepsilon_0$ ,  $\chi_x$  e  $\chi_y$ .
2. Conoscendo il legame costitutivo  $\sigma$ - $\varepsilon$  del materiale, anche la tensione normale  $\sigma_z$  è definita univocamente in ciascun punto della sezione (in maniera distinta per acciaio e calcestruzzo), in funzione della deformazione e quindi dei tre parametri  $\varepsilon_0$ ,  $\chi_x$  e  $\chi_y$ .

# Modellazione in presenza di Ne M

## Caratteristiche della sollecitazione

3. Noto lo stato tensionale,  
le caratteristiche della sollecitazione  $N$ ,  $M_x$  ed  $M_y$  sono pari a:

$$N = \int \sigma_z dA$$

$$M_x = \int \sigma_z y dA$$

$$M_y = -\int \sigma_z x dA$$

Nota: nell'applicare queste espressioni, il legame costitutivo sperimentale del materiale viene sostituito da modelli semplificati definiti in relazione alla entità di tensioni e deformazioni dovute ai carichi. Il modo di operare è quindi legato ai tre stadi di comportamento visti in precedenza.

# Modellazione in presenza di N e M

1° stadio

## Modello:

Calcestruzzo – lineare elastico

Acciaio – lineare elastico

## Ricorda:

1. Questo può essere utilizzato fintanto che il calcestruzzo non è ancora fessurato.
2. Pur ipotizzando che il calcestruzzo sia omogeneo ed isotropo ed abbia un comportamento elastico lineare a compressione le formule di Scienza delle Costruzioni non possono essere usate a causa della presenza del materiale acciaio, con caratteristiche nettamente diverse da quelle del calcestruzzo.

# Modellazione in presenza di N e M

## 1° stadio (Omogeneizzazione della sezione)

Date due aree elementari  $dA_c$  di calcestruzzo e  $dA_s$  di acciaio, sottoposte ad una stessa deformazione  $\varepsilon$  si ha:



$$\sigma_c = E_c \varepsilon$$



$$\sigma_s = E_s \varepsilon$$

$$\sigma_s = \frac{E_s}{E_c} \sigma_c = n \sigma_c$$

Coefficiente di omogeneizzazione ←

# Modellazione in presenza di N e M

## 1° stadio (Omogeneizzazione della sezione)

Ciò significa che, data una qualunque area elementare  $dA$

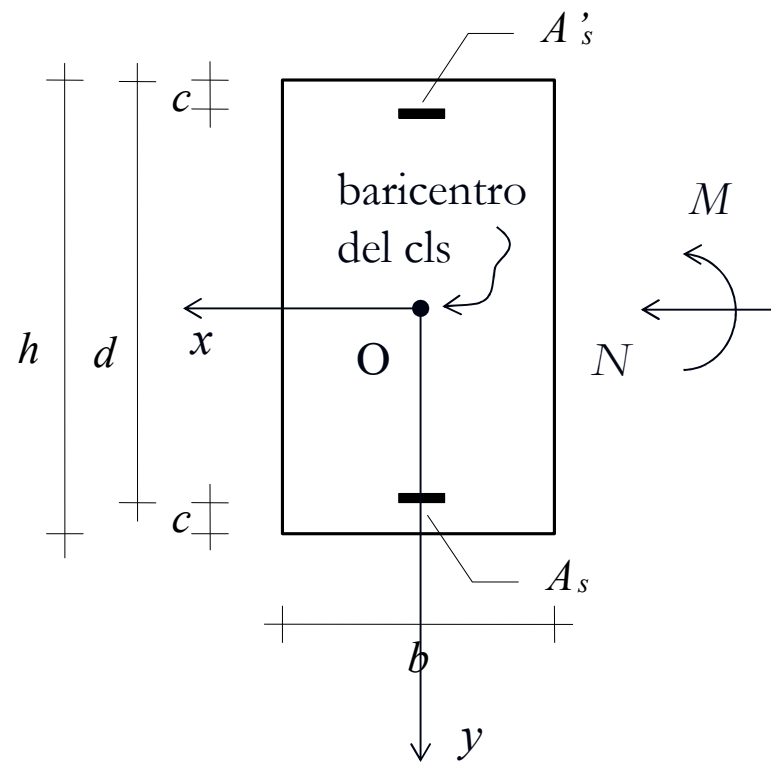
- Se si suppone che questa area elementare sia di calcestruzzo ( $dA=dA_c$ )  
il contributo di questa area alla risultante delle tensioni normali vale  $\sigma_c dA$
- Se si suppone che questa area elementare sia di acciaio ( $dA=dA_s$ )  
il contributo di questa area alla risultante delle tensioni normali vale  $n \sigma_c dA$

Per definire una sezione di materiale omogeneo, equivalente nei confronti delle azioni di sforzo normale e momento flettente, è sufficiente sostituire all'area del materiale acciaio un'area di calcestruzzo pari a quella dell'acciaio moltiplicata per il coefficiente di omogeneizzazione, ovvero  $dA_s = n dA_c$

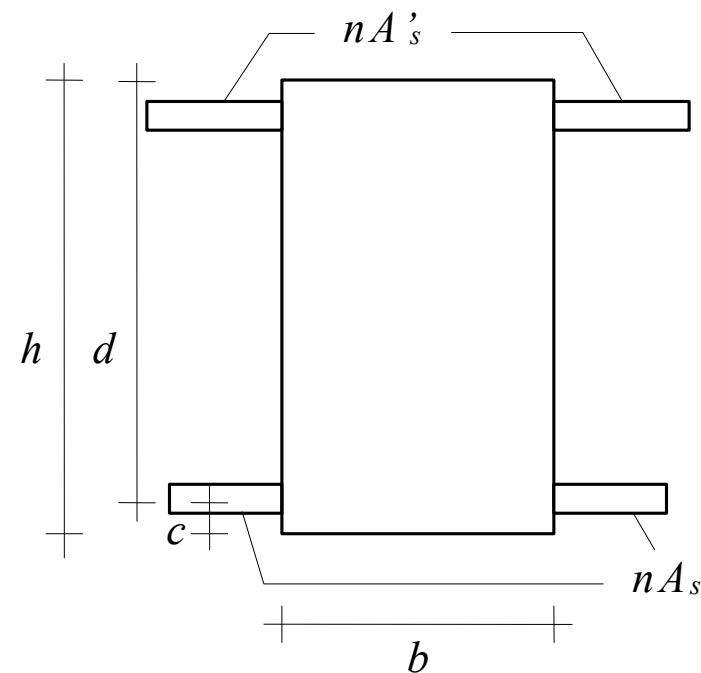
**Nota:** l'area equivalente di calcestruzzo ( $n dA_c$ ) deve essere sottoposta alla stessa deformazione normale dell'area di acciaio da sostituire.

# Modellazione in presenza di N e M

1° stadio (Omogeneizzazione della sezione)



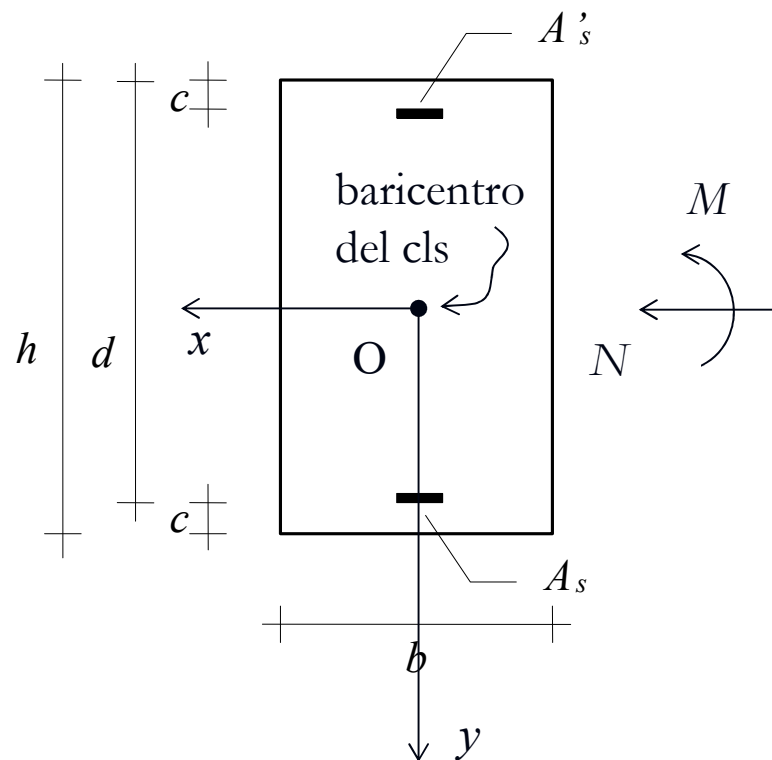
Sezione reale



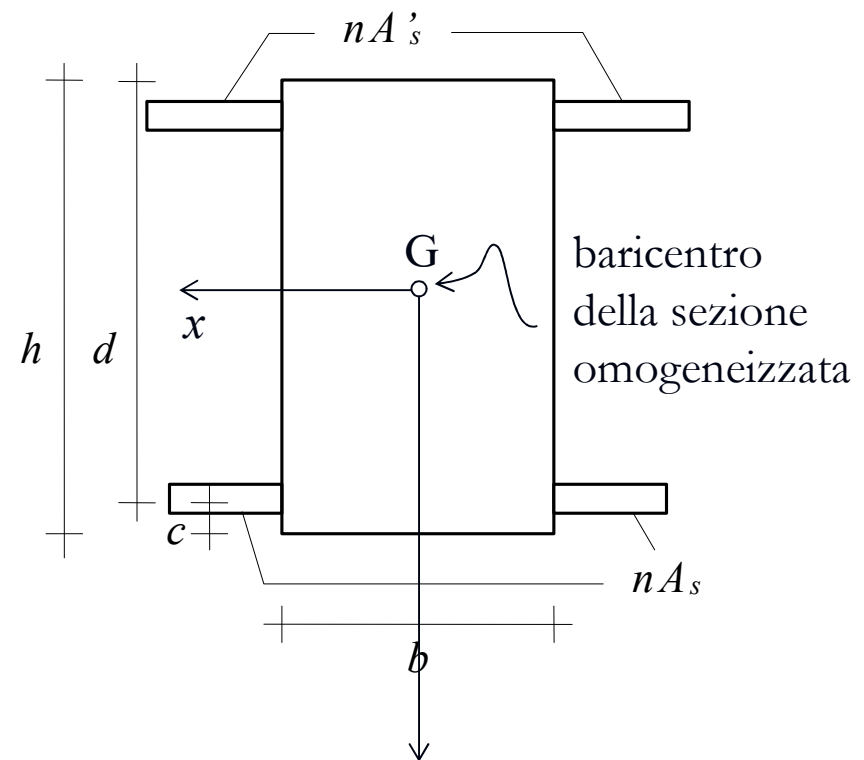
Sezione omogeneizzata

# Modellazione in presenza di N e M

1° stadio (Baricentro della sezione omogeneizzata)



O e' il punto per cui passa l'asse dell'elemento



G e' l'origine del sistema per l'applicazione delle formule di Scienza



# Modellazione in presenza di N e M

## 1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$$

Pertanto:

$$N = E \varepsilon_G \int dA + E \chi_x \int x dA + E \chi_y \int y dA = E \varepsilon_G A$$

$$M_x = E \varepsilon_G \int y dA + E \chi_x \int xy dA + E \chi_y \int y^2 dA = E \chi_y I_x$$

$$M_y = E \varepsilon_G \int x dA + E \chi_x \int x^2 dA + E \chi_y \int xy dA = - E \chi_x I_y$$

$$\text{essendo } \int x dA = \int y dA = 0 \quad \text{e} \quad \int x y dA = 0$$

# Modellazione in presenza di N e M

## 1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Dalle relazioni delle caratteristiche della sollecitazione si ottiene:

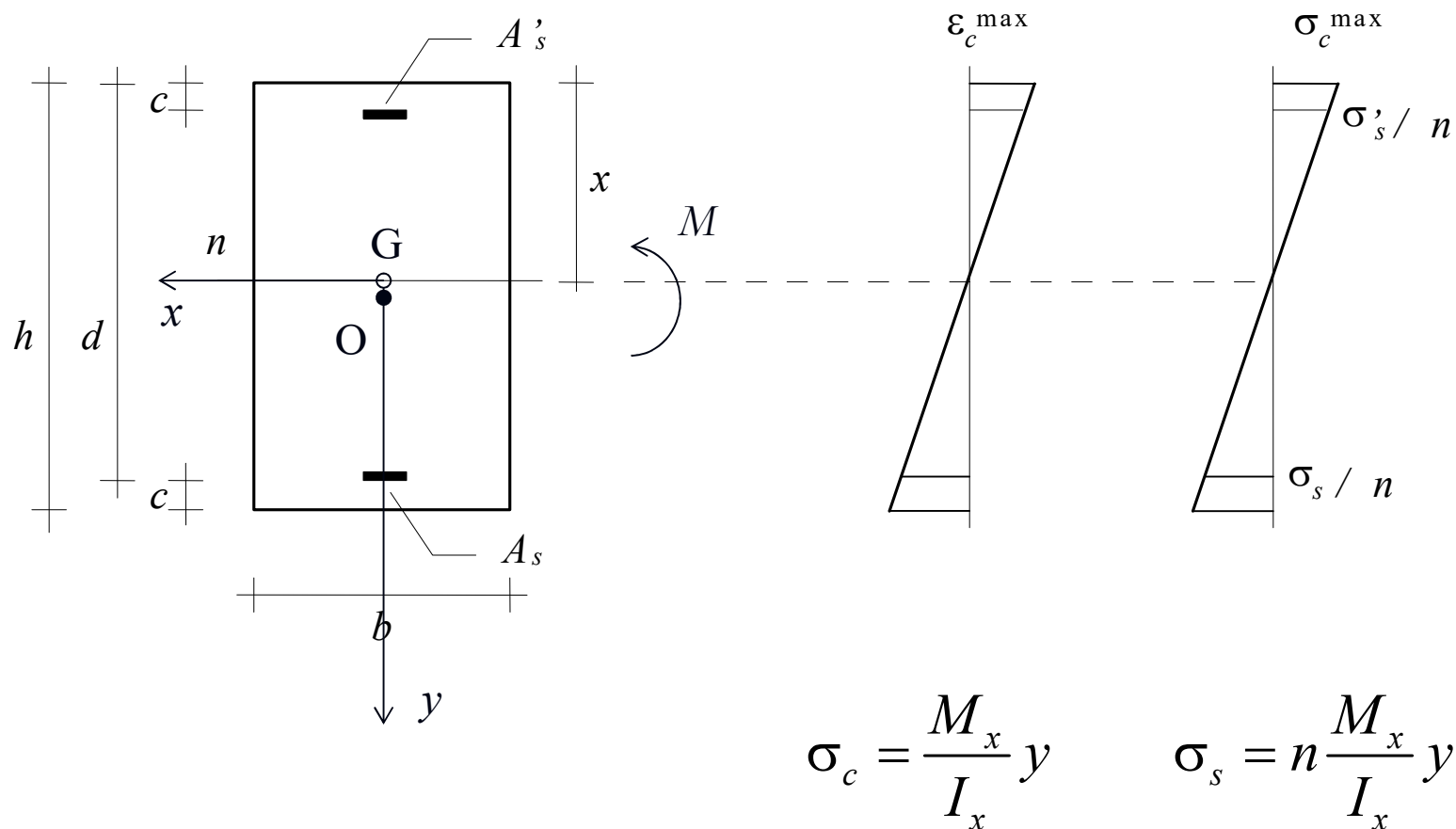
$$\varepsilon_G = \frac{N}{EA} \qquad \chi_x = -\frac{M_y}{EI_y} \qquad \chi_y = \frac{M_x}{EI_x}$$

e per sostituzione nella precedente relazione  $\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y$$

# Modellazione in presenza di N e M

1° stadio (Calcolo delle tensioni)



# Modellazione in presenza di N e M

2° stadio

## Modello:

Calcestruzzo – lineare elastico a compressione e nullo a trazione

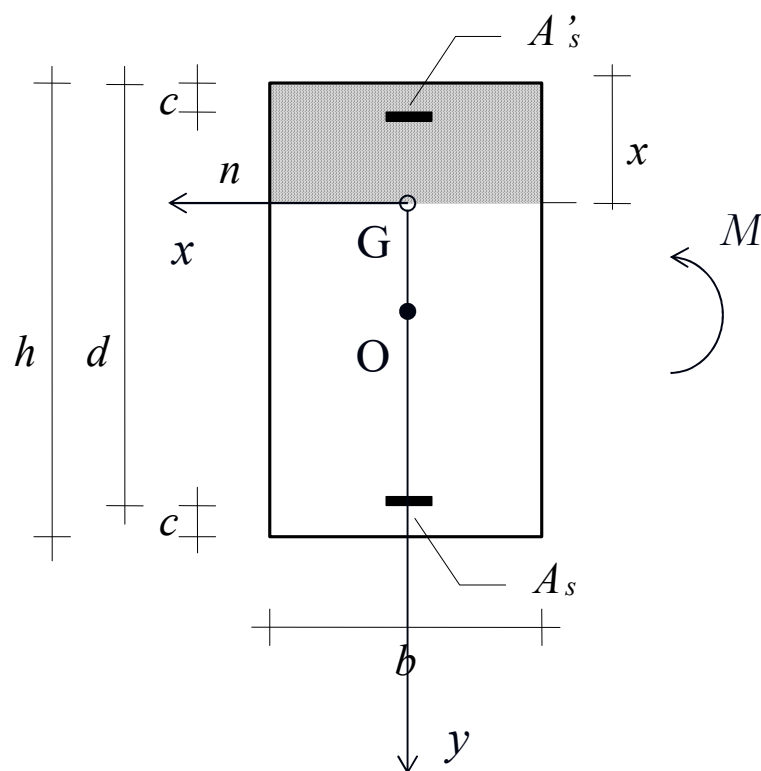
Acciaio – lineare elastico

## Ricorda:

1. Questo modello può essere utilizzato fintanto che il calcestruzzo presenta un comportamento a compressione moderatamente non lineare.
2. Le formule di Scienza delle Costruzioni possono essere utilizzate se si determina prima l'area del calcestruzzo reagente a compressione

# Modellazione in presenza di N e M

2° stadio (Calcolo delle tensioni)



La sezione costituita da:

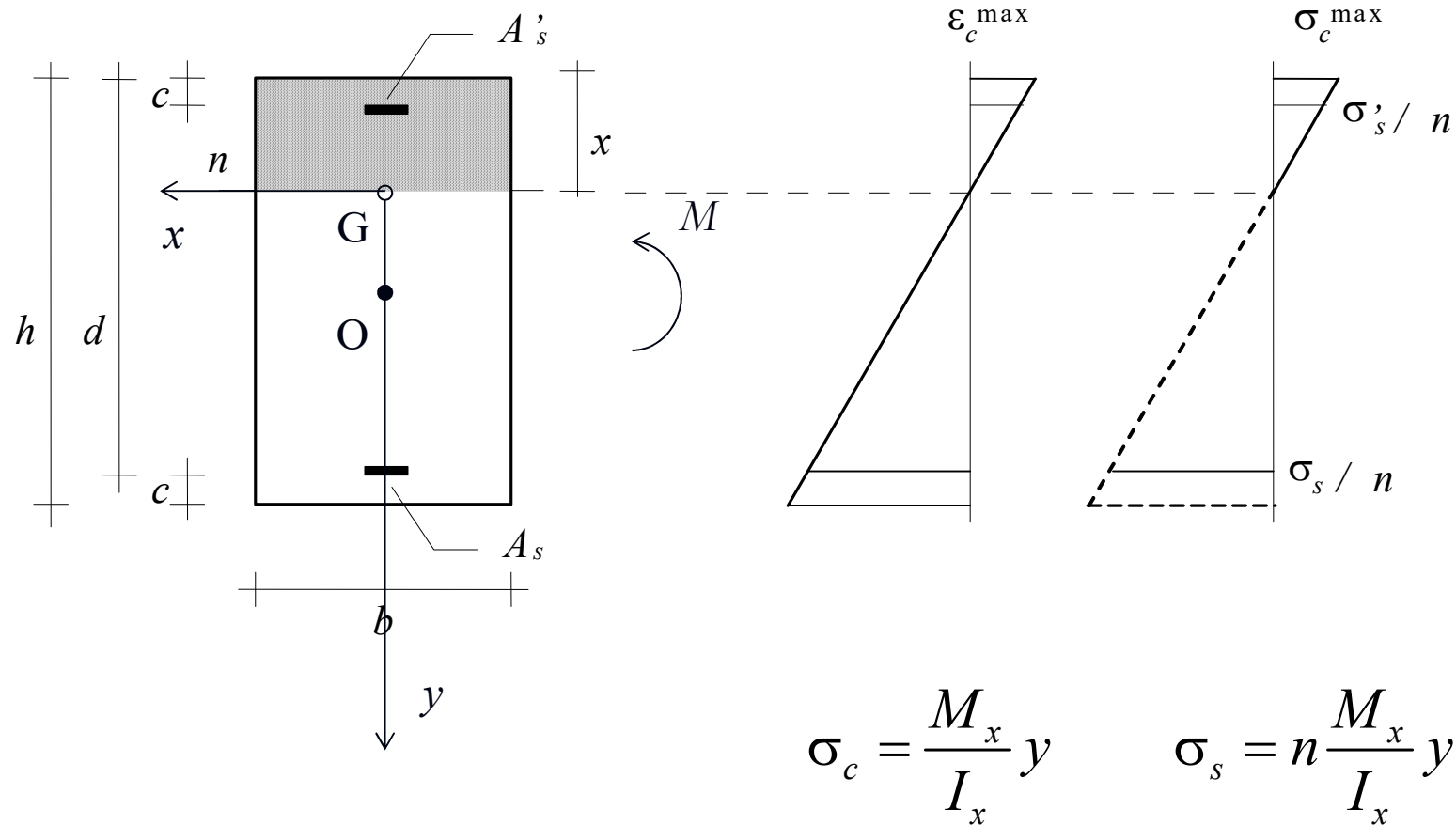
- calcestruzzo compresso
- armatura omogeneizzata

prende il nome di

**sezione reagente  
omogeneizzata**

# Modellazione in presenza di N e M

2° stadio (Calcolo delle tensioni)



# Modellazione in presenza di N e M

3° stadio

## Modello:

Calcestruzzo – non lineare a compressione e nullo a trazione

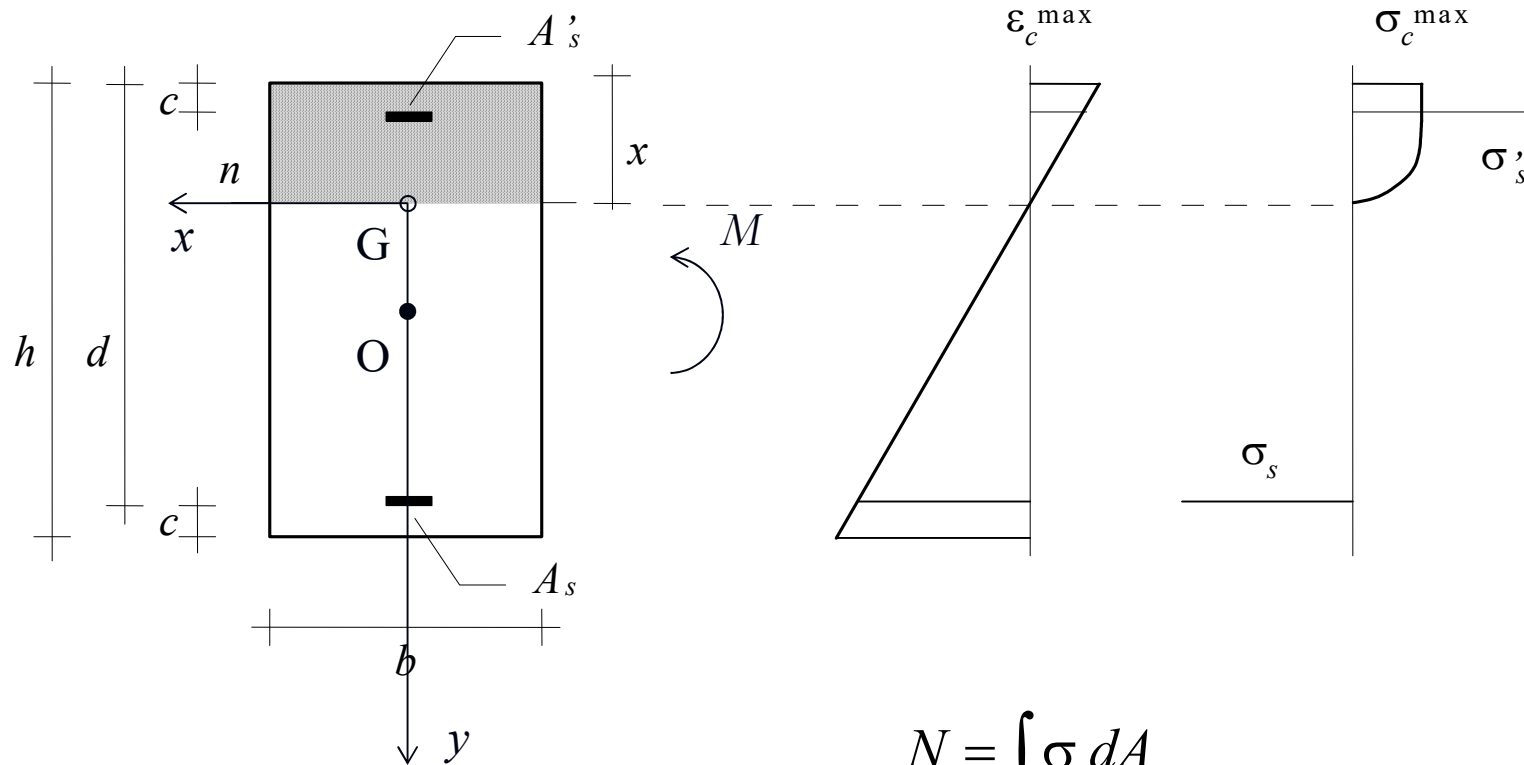
Acciaio – non lineare

## Ricorda:

1. Questo modello e' utilizzato per valutare l'attingimento dello stato limite ultimo di sezioni.
2. Non e' possibile fare uso delle relazioni di Scienza delle Costruzioni che ipotizzano legami costitutivi lineari elastici.

# Modellazione in presenza di N e M

3° stadio (Calcolo delle tensioni)



Le caratteristiche delle sollecitazione  
valgono:

$$N = \int \sigma dA$$

$$M_x = \int \sigma y dA \quad M_y = - \int \sigma x dA$$



**FINE**